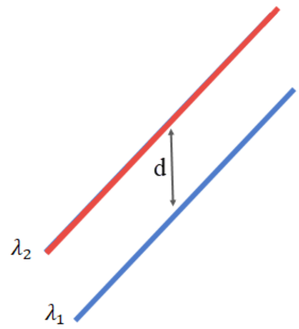
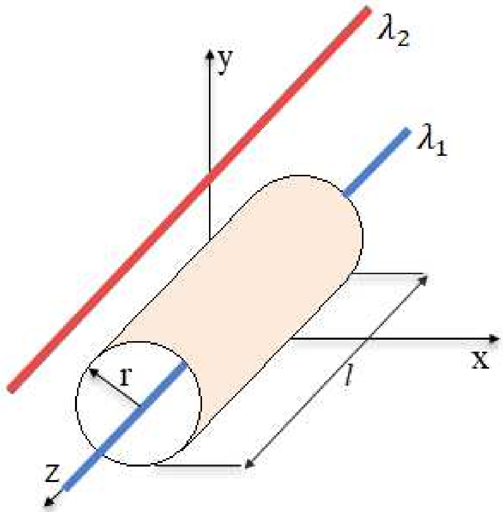
Superposición del campo eléctrico para dos hilos infinitos:

Sean dos hilos infinitos paralelos separados entre sí una distancia d como muestra la figura. Ambos cargados con densidades de carga lineales uniformes positivas λ_1 y λ_2.

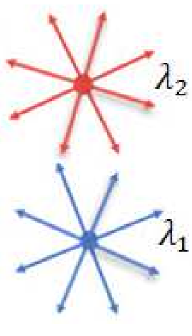


Hallar el campo eléctrico generado por ambas distribuciones para todo el espacio.

Calculamos el campo eléctrico para el hilo 1 con el eje de coordenadas como se indica, elegimos como superficie gaussiana un cilindro de largo *l*:



Ya vimos en la teórica (ver "Clase 3 Gauss") el campo de un hilo aplicando la Ley de Gauss, analizamos la construcción geométrica y llegamos a la conclusión de que el campo es radial y saliente para una distribución cargada linealmente en forma uniforme y con carga positiva.



$$\overline{E}\,(r,\varphi,z) = E_r(r)\,\hat{r}$$

Partiendo de la Ley de Gauss:

$$\oiint \bar{E}.\overline{dS} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

Para el cilindro de largo l y radio variable r, en las tapas el diferencial de superficie es perpendicular al campo, la expresión anterior queda:

$$E\left(\int_0^{2\pi} r\, d\varphi \int_{\frac{-l}{2}}^{\frac{l}{2}} dz\right) = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

Siendo: $Q_{enc} = \int_{\frac{-l}{2}}^{\frac{l}{2}} \lambda\, dz = \lambda\, l$

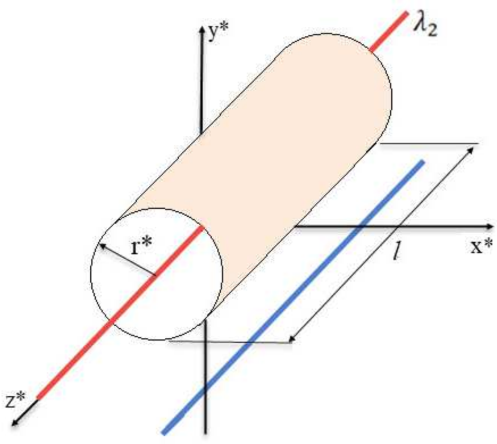
Entonces:

$$2\pi r l E = \frac{\lambda\, l}{\varepsilon_0}$$

Por lo tanto el campo eléctrico para todo el espacio del hilo 1 es:

$$\bar{E}_1 = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0\, r}\, \hat{r}$$

Para calcular el campo para el cilindro 2 haremos exactamente lo mismo, pero prestemos atención a los ejes coordenados que debemos usar:

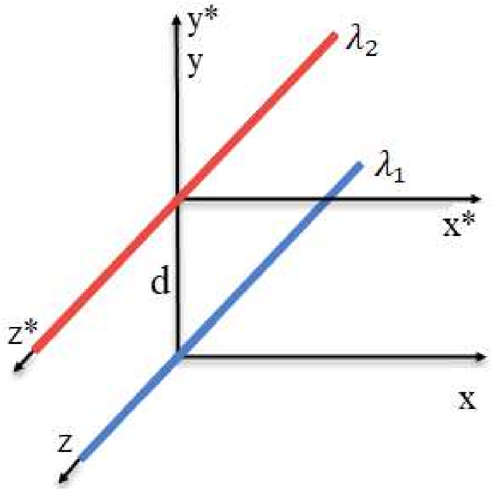


Análogamente al hilo 1, ahora obtendremos:

$$\bar{E}_2 = \frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0\, r^*}\ \widehat{r^*}$$

¿Cómo hallamos el campo total?

¿Podríamos sumar directamente las expresiones de $\bar{E}_1$ y $\bar{E}_2$? ¿Por qué?



Para hallar el campo total tendremos que sumar vectorialmente ambos campos, para eso tendremos que pasarlos a coordenadas cartesianas y referir ambas expresiones a un mismo sistema, por ejemplo, hagámoslo respecto del sistema del hilo 1.

$$x^* = x$$

$$z^* = z$$

Pero ¿ $y^* = y$? No, porque cuando $y = d \rightarrow y^* = 0$ entonces $y^* = y - d$

Recordemos que

$$r = (x, y)$$

$$\hat{r} = \frac{r}{|r|} = \frac{(x,y)}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$$

Y entonces:

$$r^* = (x^*, y^*) = (x, (y - d))$$

$$\widehat{r^*} = \frac{r^*}{|r^*|} = \frac{(x^*, y^*)}{\sqrt{(x^{*2} + y^{*2})}} = \frac{(x, (y - d))}{\sqrt{(x^2 + (y - d)^2)}}$$

Las expresiones de los campos para los hilos 1 y 2 quedarán:

$$\bar{E}_1 = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{(x, y)}{(x^2 + y^2)}$$

$$\bar{E}_2 = \frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0}\frac{(x, (y - d))}{(x^2 + (y - d)^2)}$$

O sea que el campo total ahora sí es la suma de $\bar{E}_1$ y $\bar{E}_2$ componente a componente:

$$E_{x\,TOTAL} = \frac{x}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\lambda_1}{(x^2 + y^2)} + \frac{\lambda_2}{(x^2 + (y - d)^2)}\right)$$

$$E_{y\,TOTAL} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\lambda_1\, y}{(x^2 + y^2)} + \frac{\lambda_2\,(y - d)}{(x^2 + (y - d)^2)}\right)$$